Concours interne EIVP 2019

Première page consacrée à la date, le nom du concours, etc.

Le sujet est composé de deux exercices et un problème totalement indépendants.

Exercice 1

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. On note I_2 la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$. Par convention, $A^0=I_2$.

1) Calculer A^2. Montrer qu'il existe deux réels *x* et *y*, qu'on donnera, tels que $A^2=xA+yI_2$.

2) Montrer par récurrence que, pour tout entier *n* positif ou nul, il existe deux réels a_n et b_n, qu'on ne demande pas de calculer, tels que $A^n=a_nA+b_nI_2$.

3) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$.

4) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\frac{1}{5}\left(3^n-(-2)^n\right)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, déterminer b_n.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par ses deux premiers termes $u_0=-\frac{1}{2}$, $u_1=1$ et la relation de récurrence $u_{n+2}=u_{n+1}+6u_n+3$. On pose $B=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $L=-\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel *n*, $X_n=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}$.

4.a) Montrer que pour tout entier naturel *n* on a : $X_{n+1}=AX_n+B$.

4.b) Vérifier que $AL+B=L$.

4.c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a $X_n=A^n\left(X_0-L\right)+L$.

4.d) Déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel *n* on a :

$$u_n=\frac{3}{10}\left(3^n-(-2)^n\right)-\frac{1}{2}.$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I_3 la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice *A* définie par :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On se propose de déterminer deux matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

1) Calculer les matrices $(A-I_3)^2$ et $(A-I_3)^3$.

On pose, $\forall x \in]-1,1[$, $\varphi(x)=\sqrt{1+x}$.

2.a) Justifier que φ est de classe C^2 sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.

2.b) En déduire le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

3) On pose, pour tout *x* réel, $P(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$. Développer $(P(x))^2$.

4) On pose $N=A-I_3$ et $C=I_3+\frac{1}{2}N-\frac{1}{8}N^2$. Calculer C^2. En déduire deux matrices M_1 et M_2 solutions de l'équation $M^2=A$.

Problème :

On pose $I_0=\int_0^1 e^{-x^2}dx$ et pour tout entier $n \geq 1$, $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x^2}dx$.

1.a) Etablir pour tout $x \in [0,1]$, l'encadrement : $0 \leq e^{-x^2} \leq 1$.

1.b) En déduire que pour tout entier $n \geq 0$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

1.c) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2) Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1]$, $f(x)=e^{-x^2}$. On note f' la dérivée de *f*.

2.a) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $f'(x)$.

2.b) En déduire que $I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$.

3.a) En remarquant que $x^{n+2}e^{-x^2} = x^{n+1} \times xe^{-x^2}$ et à l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier $n \geq 0$, la relation : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n - \dfrac{1}{2e}$.

3.b) Déterminer la limite de nI_n lorsque $n \to +\infty$.

4) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $u_n = \dfrac{I_{2n+1}}{n!}$.

4.a) Etablir la relation : $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{2e} \times \dfrac{1}{(n+1)!}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2e} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

4.b) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} \right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

5) En utilisant la question précédente, donner sous forme de somme, l'expression de I_{2n+1} en fonction de *n*.

Dans les questions qui suivent, on note J_n l'intégrale suivante : $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$.

6) Soit *A* un réel, $A > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^A xe^{-x^2} dx$. En déduire que l'intégrale J_1 est convergente, et donner sa valeur.

7) Soit *A* un réel, $A > 0$, et *n* un entier positif ou nul. En remarquant que $x^{n+2}e^{-x^2} = x^{n+1} \times xe^{-x^2}$ et à l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre $\displaystyle\int_0^A x^{n+2}e^{-x^2} dx$, $\displaystyle\int_0^A x^n e^{-x^2} dx$ et *A*. En déduire que, si l'intégrale J_n est convergente, l'intégrale J_{n+2} l'est aussi et que :

$$J_{n+2} = \frac{n+1}{2} J_n .$$

8) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale J_{2p+1} est convergente et que $J_{2p+1} = \dfrac{p!}{2}$.

On admettra que l'intégrale J_0 est convergente et que $J_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

9) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale J_{2p} est convergente et que $J_{2p} = \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2p-1)}{2^{p+1}}$.